

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXI. esztendő

2024-2025. tanév

9. évfolyam

II. forduló

Megoldások

1. Adott tíz különböző kétjegyű pozitív egész szám. Mutassuk meg, hogy ezen számok közül némelyek (akár az összes) felhasználásával mindig képezhetünk két olyan közös elem nélküli halmazt, hogy az egyikben lévő elemek összege egyenlő a másikban lévő elemek összegével.

Megoldás

Jelöljük a tíz szám halmazát H -val, ennek néhány eleméből képzett két halmazt A -val és B -vel. H részhalmazainak száma $2^{10} = 1024$.

Jelölje S_A és S_B az A és a B halmaz elemeinek összegét. Mivel a legkisebb kétjegyű szám a 10, illetve a tíz legnagyobb kétjegyű szám összege $90 + 91 + \dots + 99 = 945$, ezért ha A és B nem üres halmazok, akkor $10 \leq S_A \leq 945$, $10 \leq S_B \leq 945$. A skatulyaelv alapján biztosan lesz legalább két olyan részhalmaz H -nak, amelyekben az elemek összege egyenlő. Ha A és B nem lennének diszjunktak, akkor a közös elemeket kivesszük mindkét halmazból, amivel a két halmazban lévő elemek összegének egyenlősége továbbra is fennmarad.

2. Mutassuk meg, hogy ha két egész szám különbsége 2, akkor köbeik különbségének abszolútértéke felbontható három szám négyzetének összegére.

1. Megoldás

Legyen a két szám n és $n + 2$.

$$\begin{aligned} |(n+2)^3 - n^3| &= (n+2)^3 - n^3 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8 - n^3 = 6n^2 + 12n + 8 \\ &= (2n+2)^2 + (n+2)^2 + n^2 \end{aligned}$$

2. Megoldás

Legyen a két szám a és b . Ekkor $a - b = 2$

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 2(a^2 + ab + b^2) = a^2 + b^2 + a^2 + 2ab + b^2 \\ &= a^2 + b^2 + (a+b)^2 \end{aligned}$$

3. Egy rombusz egyik átlója 1,6-szerese az oldalának. Hányszorosa az oldalnak a másik átló és a rombusz magassága?

Megoldás

Legyenek a rombusz csúcsai A, B, C, D az átlók metszéspontja E , a rombusz oldala a . Ekkor $AC = 1,6a$.

Mivel a rombusz átlói merőlegesen és felezik egymást, így $AE = 0,8a$.

Mivel $AE^2 + EB^2 = AB^2$, azaz $(0,8a)^2 + EB^2 = a^2$, ahonnan $EB = \sqrt{a^2 - (0,8a)^2} = 0,6a$.
A másik átló így $ED = 2EB = 1,2a$, vagyis az oldal 1,2-szerese.
A rombusz magasságának meghatározásához a rombusz területét kétféleképpen írjuk fel:

$$am = \frac{AC \cdot BD}{2},$$

ahonnan

$$m = \frac{AC \cdot BD}{2a} = \frac{1,2a \cdot 1,6a}{2a} = 0,96a,$$

vagyis a rombusz magassága az oldal 0,96-szorosa.

4. Melyik az a legkisebb 36-tal osztható pozitív egész szám, amelynek tízes számrendszerbeli alakja csak 1-es és 2-es számjegyeket tartalmaz?

Megoldás

Mivel $4 \cdot 9 = 36$, valamint 4 és 9 legnagyobb közös osztója 1, ezért egy szám pontosan akkor osztható 36-tal, ha osztható 4-gyel és 9-cel.

Mivel egy szám akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két számjegyéből alkotott szám is osztható 4-gyel, ezért a keresett szám 12-re végződik (mert a 11, 21, 22 nem osztható 4-gyel).

Mivel egy szám annál kisebb, minél kevesebb számjegyet tartalmaz, és pontosan akkor osztható 9-cel, ha a számjegyek összege osztható 9-cel, ezért a keresett szám: 22212.

5. Adjuk meg a $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2px + p - x + 5$ ($p \in \mathbb{R}$) másodfokú függvény minimumának maximális értékét.

Megoldás

A minimum helye:

$$x_{\min} = \frac{-(2p-1)}{2} = \frac{1}{2} - p.$$

Értéke:

$$f\left(\frac{1}{2} - p\right) = \left(\frac{1}{2} - p\right)^2 + 2p\left(\frac{1}{2} - p\right) + p - \left(\frac{1}{2} - p\right) + 5 = -p^2 + 2p + \frac{19}{4}.$$

A minimumértéke p -nek másodfokú függvénye:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(p) = -p^2 + 2p + \frac{19}{4}.$$

Ez egy negatív főegyütthatójú másodfokú függvény, így maximuma van, aminek helye:

$$p_{\max} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Értéke:

$$g(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + \frac{19}{4} = \frac{23}{4} = 5,75.$$

Tehát az f minimumának maximális értéke 5,75.

6. Képezzük a tízes számrendszerben a következő számot:

$$\overline{122333444455555\dots1010\dots10\dots nn\dots n}.$$

Ebben a számban n -ig minden egyes pozitív egész szám pontosan annyiszor szerepel egymás után, amennyi a szám értéke. Jelölje $N(n)$ a szám számjegyeinek számát. Oldjuk meg az

$$N(n) = n^2$$

egyenletet a legfeljebb kétjegyű pozitív egész számok halmazán.

Megoldás

Ha n egyjegyű,

$$\begin{aligned} N(n) &= 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \\ \frac{n(n+1)}{2} &= n^2 \\ n^2 + n &= 2n^2 \\ n &= n^2, \end{aligned}$$

amiből megkapjuk az $n = 1$ triviális megoldást.

Ha n kétjegyű,

$$\begin{aligned} N(n) &= 1 + \dots + 9 + 2(10 + \dots + n) = 45 + 2 \cdot \frac{10+n}{2} \cdot (n-9) = 45 + n^2 + n - 90 \\ n^2 + n - 45 &= n^2, \end{aligned}$$

ahonnan megkapjuk az $n = 45$ megoldást. Ekkor a számjegyek száma éppen 2025.

Tehát a megoldások az 1 és a 45.

Megjegyzés

Ha n legalább háromjegyű, azaz $n \geq 100$:

$$\begin{aligned} N(n) &= 1 + \dots + 9 + 2 \cdot (10 + \dots + 99) + 3 \cdot 100 + \dots \geq 2 \cdot (1 + \dots + n) = \\ &= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n^2 + n > n^2 \end{aligned}$$

Tehát ha n tetszőleges pozitív egész, az egyedüli megoldások akkor is az 1 és a 45.

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXI. esztendő

2024-2025. tanév

10. évfolyam

II. forduló

Megoldások

1. Számítsuk ki az $S_{2025} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2025}$ összeget, ha $a_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n+1} + \frac{2}{n+2}$ (n pozitív egész szám).

Megoldás

Mivel $a_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n+1} + \frac{2}{n+2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - 2 \cdot \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$, ezért

$$\begin{aligned} S_{2025} &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2025} = \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \frac{1}{2025} - \frac{1}{2026} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2026} - \frac{1}{2027} \right) = \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2025} - \frac{1}{2026} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2026} - \frac{1}{2027} \right) = \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2026} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2027} \right) = \frac{2}{2027} - \frac{1}{2026} = \frac{2 \cdot 2026 - 2027}{2026 \cdot 2027} = \frac{2025}{2026 \cdot 2027} \end{aligned}$$

2. Két különböző sugarú kör kívülről érinti egymást, a nagyobbik sugara R , a kisebbik sugara r . Határozzuk meg R és r függvényében a két kör közös belső érintőjének a két közös külső érintő közé eső szakaszát.

Megoldás

Tekintsük az ábrát a jelöléseivel.

Az M pontból az O_1 középpontú körhöz húzott két érintő MD és MA , így e két szakasz egyenlő hosszú, azaz $MD = MA$.

Ugyanígy $MD = MB$.

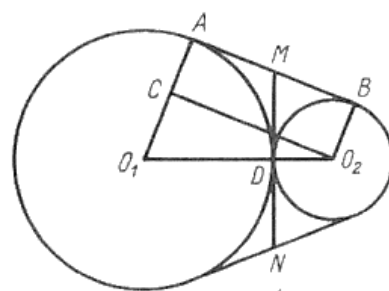
Így $MN = 2MD = AM + MB = AB$, vagyis a feladat ekvivalens az AB külső érintőszakasz R és r függvényében történő kifejezésével.

Vegyük föl az AB -vel párhuzamos O_2C szakaszt. Ekkor $O_1CO_2 \perp O_1AB \perp 90^\circ$, így az O_1CO_2 derékszögű háromszögben $CO_2 = AB$, $O_1C = R - r$, $O_1O_2 = R + r$, így

$$O_1O_2^2 = O_1C^2 + CO_2^2$$

$$\text{azaz } AB^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr$$

$$\text{vagyis } MN = AB = 2\sqrt{Rr}.$$



3. Közismert, hogy Pitagorasz tételének megfordítása is igaz, azaz ha egy háromszög a, b, c oldalhosszaira teljesül, hogy $a^2 + b^2 = c^2$, akkor a háromszög derékszögű. Bizonyítsuk ezt be direkt (nem indirekt) módon.

Megoldás

Tétel: Ha egy ABC háromszög $a \leq b < c$ oldalaira igaz, hogy $a^2 + b^2 = c^2$, akkor az ABC háromszög derékszögű.

Tekintsük a háromszög leghosszabb oldalához tartozó m magasságát, amely biztosan a háromszögön belül található. E magasság M talppontja ossza az AB oldalt egy p és egy q hosszúságú szakaszra. Pitagorasz tétele miatt

$$a^2 = m^2 + p^2,$$

$$b^2 = m^2 + q^2.$$

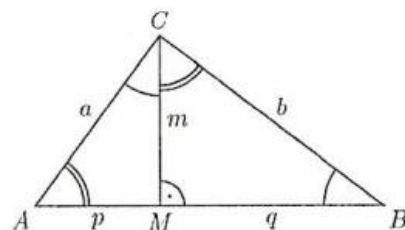
$$\text{A feltételből adódóan } c^2 = a^2 + b^2 = m^2 + p^2 + m^2 + q^2 = 2m^2 + p^2 + q^2.$$

$$\text{Mivel } c = p + q, \text{ ezért } c^2 = (p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

$$\text{vagyis } 2m^2 = 2pq \text{ ahonnan } \frac{m}{p} = \frac{q}{m}.$$

Mivel az AMC és CMB derékszögű háromszögekben két-két oldal aránya és az általuk közbezárt szög megegyezik, ezért $AMC \sim CMB$.

Mivel $AMC \sim CMB$, ezért szögeik páronként egyenlő nagyságúak, vagyis $ACM \angle = CBM \angle$, és $CAM \angle = BCM \angle$, így $ACB \angle = ACM \angle + BCM \angle = 90^\circ$.



4. Egy halomban 2024 darab kavics van. Egyet eldobunk és a maradékot két halomra osztjuk. Ezután megint eldobunk 1 kavicsot egy olyan halomból, amelyben 1-nél több kavics van, és egy halmot két részre osztunk. Néhány ilyen művelettel elérhető-e, hogy minden halomban 5 kavics legyen?

Megoldás

Ha n -szer végezzük el a műveletet, akkor $2024 - n$ kavics marad, és mivel minden műveletvégzésnél eggyel nő a halmok száma, ezért $n + 1$ halom lesz.

Tételezzük föl, hogy n lépés után ($n \in \mathbb{Z}^+$) minden halomban 5 kavics van. Ekkor

$$5(n + 1) = 2024 - n$$

$$5n + 5 = 2024 - n$$

$$6n = 2019,$$

azonban ez ellentmondás, mivel 2019 nem osztható 6-tal, vagyis hamis volt a föltevésünk, így nem érhető el ilyen lépésekkel, hogy minden halomban 5 kavics legyen.

5. Tekintsük az $x^2 + ax + b$ polinomot, ahol az a és b együtthatók egész számok. Bizonyítsuk be, hogy a polinom helyettesítési értéke akkor és csak akkor lesz végtelen sok egész x helyen négyzetszám, ha a kifejezés egy elsőfokú polinom négyzete.

Megoldás

Legyenek x és y olyan egész számok, amelyekre $x^2 + ax + b = y^2$.

Ekkor

$$\begin{aligned}4x^2 + 4ax + 4b &= 4y^2 \\(2x + a)^2 - a^2 + 4b &= (2y)^2 \\4b - a^2 &= (2y)^2 - (2x + a)^2 \\4b - a^2 &= (2y + 2x + a)(2y - 2x - a).\end{aligned}$$

Ha $4b - a^2 \neq 0$, akkor az egyenlet baloldala egy pozitív egész szám, ami csak véges sok féleképpen bontható föl két egész szám szorzataként, ami pedig egyértelműen meghatározza x -et és y -t. Így csak véges sok olyan x van, amire $x^2 + ax + b$ négyzetszám.

Ha viszont $4b - a^2 = 0$, akkor végtelen sok féleképpen írható föl két egész szám szorzataként, hiszen, ha az egyik tényező 0, akkor a másik tényező bármekkora értéket vehet föl. Ekkor, mivel $4b$ páros, a páros, azaz $2k$ alakú, akkor $4b - (2k)^2 = 0$, ahonnan $b = k^2$, így $x^2 + ax + b = x^2 + 2kx + k^2 = (x + k)^2$, vagyis bármely x értékre négyzetszámot ad.

6. Határozzuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 + px + p - 1 = 0$ egyenlet x_1 és x_2 valós gyökeire teljesüljön az $x_1^2 + x_1^3 + x_2^2 + x_2^3 = 0$ összefüggés.

Megoldás

$$x_1^2 + x_1^3 + x_2^2 + x_2^3 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1^3 + x_2^3 = 0$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 + (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2) = 0$$

$$(-p)^2 - 2(p - 1) + (-p)^3 - 3(p - 1)(-p) = 0$$

$$-p^3 + 4p^2 - 5p + 2 = 0$$

$$(p - 1)(-p^2 + 3p - 2) = 0$$

$$-(p - 1)^2(p - 2) = 0$$

ahonnan $p = 1$ vagy $p = 2$.

Ha $p = 1$, akkor az egyenlet gyökei $x_1 = -1, x_2 = 0$, ha $p = 2$, akkor az egyenlet gyökei $x_1 = x_2 = -1$, és mindkét esetben teljesül a feladat feltétele.

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXI. esztendő

2024-2025. tanév

11. évfolyam

II. forduló

Megoldások

1. Számítsuk ki $\log_2(\log_2(A + 1))$ értékét, ha

$$A = (2^{2^0} + 1) \cdot (2^{2^1} + 1) \cdot (2^{2^2} + 1) \cdot \dots \cdot (2^{2^{2024}} + 1)$$

Megoldás

$$\begin{aligned} A &= 1 \cdot A = (2^{2^0} - 1)(2^{2^0} + 1) \cdot (2^{2^1} + 1) \cdot (2^{2^2} + 1) \cdot \dots \cdot (2^{2^{2024}} + 1) = \\ &= ((2^{2^0})^2 - 1) \cdot (2^{2^1} + 1) \cdot (2^{2^2} + 1) \cdot \dots \cdot (2^{2^{2024}} + 1) = \\ &= (2^{2 \cdot 2^0} - 1) \cdot (2^{2^1} + 1) \cdot (2^{2^2} + 1) \cdot \dots \cdot (2^{2^{2024}} + 1) = \\ &= (2^{2^1} - 1) \cdot (2^{2^1} + 1) \cdot (2^{2^2} + 1) \cdot \dots \cdot (2^{2^{2024}} + 1) = \\ &= ((2^{2^1})^2 - 1) \cdot (2^{2^2} + 1) \cdot \dots \cdot (2^{2^{2024}} + 1) = \\ &= (2^{2 \cdot 2^1} - 1) \cdot (2^{2^2} + 1) \cdot \dots \cdot (2^{2^{2024}} + 1) = \\ &= (2^{2^2} - 1) \cdot (2^{2^2} + 1) \cdot \dots \cdot (2^{2^{2024}} + 1) = \dots = \\ &= 2^{2^{2025}} - 1 \end{aligned}$$

vagyis

$$\log_2(\log_2(A + 1)) = \log_2(\log_2(2^{2^{2025}} - 1 + 1)) = \log_2(\log_2 2^{2^{2025}}) = \log_2(2^{2025}) = 2025.$$

2. Adjuk meg az összes olyan kétjegyű pozitív egész számot, amelyek harmadik hatványának utolsó két jegyéből alkotott szám megegyezik az eredeti kétjegyű számmal (pl. 99, mivel $99^3 = 970299$).

Megoldás

Jelölje x a feladatban szereplőkétjegyű számot. Mivel x^3 és x utolsó két számjegye megegyezik, ezért $x^3 - x$ utolsó két számjegye 0, vagyis $x^3 - x$ osztható 100-zal.

Mivel $x^3 - x = x(x^2 - 1) = (x - 1) \cdot x \cdot (x + 1)$ három egymást követő pozitív egész szám szorzata, ezért 100-zal való oszthatóságának szükséges (de nem elegendő) feltétele, hogy a három szám egyike osztható legyen 25-tel. Mivel x kétjegyű pozitív egész, így x lehetséges értékei: 24, 25, 26, 49, 50, 51, 74, 75, 76, 99.

(x 4-gyel osztva nem adhat 2-t maradékkul, mert akkor $(x - 1) \cdot x \cdot (x + 1)$ nem lenne 4-gyel osztható, így az előbbi felsorolásból a 26, 50, 74 kizárható.)

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a feladat feltételeinek eleget tevő számok: 24, 25, 49, 51, 75, 76, 99.

3. Egy téglatest egy csúcsából kiinduló három élének hossza a, b, c . Határozzuk meg a téglatest térfogatát, ha teljesülnek a következő egyenlőségek.

$$\log_2 a + \log_4 b + \log_4 c = 2$$

$$\log_3 b + \log_9 c + \log_9 a = 2$$

$$\log_4 c + \log_{16} a + \log_{16} b = 2$$

Megoldás

A logaritmus megfelelő azonossága és definíciója alapján egyenletrendszerünk a következő alakban írható:

$$\log_2 a + \frac{\log_2 b}{2} + \frac{\log_2 c}{2} = 2$$

$$\log_3 b + \frac{\log_3 c}{2} + \frac{\log_3 a}{2} = 2$$

$$\log_4 c + \frac{\log_4 a}{2} + \frac{\log_4 b}{2} = 2$$

ahonnan

$$\log_2(a^2 bc) = \log_2 16$$

$$\log_3(b^2 ca) = \log_3 81$$

$$\log_4(c^2 ab) = \log_4 256.$$

Így a logaritmus függvény kölcsönösen egyértelműsége miatt

$$a^2 bc = 16$$

$$b^2 ca = 81$$

$$c^2 ab = 256.$$

E három egyenletet összeszorozva kapjuk, hogy $a^4 b^4 c^4 = 16 \cdot 81 \cdot 256$, ahonnan $abc = 24$, ami az a, b, c élű téglatest térfogata.

Megjegyzés

A feladat szövege alapján föltehattük, hogy az egyenletrendszernek létezik megoldása az $(\mathbb{R}^+)^3$ halmazon. Ez a megoldás egyenletrendszerünk végső átalakított alakjából valamely ismeretlen kifejezésével és behelyettesítéssel meg is határozható: $a = \frac{2}{3}$; $b = \frac{27}{8}$; $c = \frac{32}{3}$.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög egyik oldalának hossza a másik két oldal hosszának mértani közepe, akkor a vele szemközti szög nem lehet nagyobb 60° -nál.

Megoldás

Legyen $a = \sqrt{bc}$. Ekkor $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$, ahonnan $b^2 + c^2 = a^2 + 2bccos\alpha$.

Tekintsük az alábbi összefüggést:

$$(b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2 = a^2 + 2bccos\alpha - 2bc = bc + 2bccos\alpha - 2bc = bc(2cos\alpha - 1) \geq 0.$$

Innen adódik, hogy $2cos\alpha - 1 \geq 0$, ahonnan $cos\alpha \geq \frac{1}{2}$, vagyis $\alpha \leq 60^\circ$.

5. Van két egyforma módon cinkelt dobókockánk, az egyik kék, a másik piros. Mindkettő esetén a lapokon található 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok dobásának valószínűsége rendre 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 arányú (azaz például 2-t kétszer akkora valószínűséggel dobunk vele, mint 1-et). Mennyi annak

a valószínűsége, hogy a két dobókockával egyszerre dobva, a dobott számok összege nem nagyobb 4-nél?

Megoldás

Jelölje ξ az egyik kockával dobott számot ($\xi = 1, 2, \dots, 6$). Mivel $P(\xi = 1) = x, P(\xi = 2) = 2x, \dots, P(\xi = 6) = 6x$ és ezen valószínűségek összege 1, ezért

$$x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1,$$

ahonnan $x = \frac{1}{21}$, vagyis az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok dobásának valószínűsége rendre: $\frac{1}{21}, \frac{2}{21}, \frac{3}{21}, \frac{4}{21}, \frac{5}{21}, \frac{6}{21}$.

A két dobott szám összege nem nagyobb, mint 4, ha a két kockával dobott számok: 1 – 1; 1 – 2; 1 – 3; 2 – 1; 2 – 2; 3 – 1.

Így a keresett valószínűség: $\frac{1}{21} \cdot \frac{1}{21} + 2 \cdot \left(\frac{1}{21} \cdot \frac{2}{21} + \frac{1}{21} \cdot \frac{3}{21} \right) + \frac{2}{21} \cdot \frac{2}{21} = \frac{1+10+4}{21^2} = \frac{15}{21^2} = \frac{5}{147}$.

6. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$(\sin x)^{2025} + (\cos x)^{2025} = 1$$

Megoldás

A $\frac{\pi}{2}$ egész számú többszörösei közül az $x = 2k\pi$ és az $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ értékek a jók ($k \in \mathbb{Z}$). Ha x nem egész számú többszöröse a $\frac{\pi}{2}$ -nek, akkor nem kapunk megoldást, ugyanis

$-1 < \sin x, \cos x < 1$, ezért $(\sin x)^{2025} + (\cos x)^{2025} < (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$.

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXI. esztendő

2024-2025. tanév

12. évfolyam

II. forduló

Megoldások

1. Oldjuk meg az egész számok halmazán az alábbi egyenletet.

$$\left| \frac{x^2 + y^2}{x + y} \right| = 1$$

Megoldás

Az abszolútértéket felbontva kapjuk, hogy

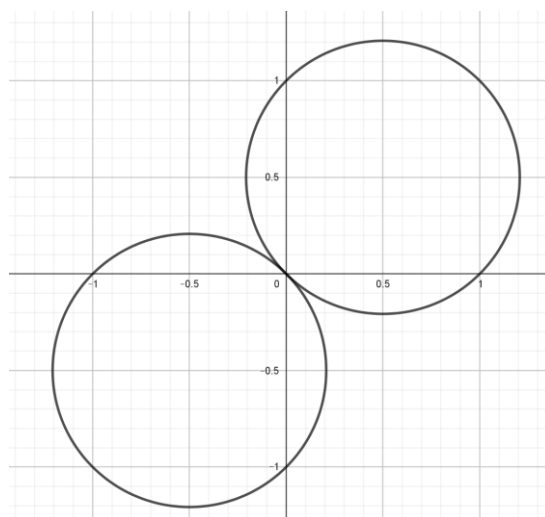
$$(1) \ x^2 + y^2 = x + y \quad \text{vagy} \quad (2) \ x^2 + y^2 = -(x + y).$$

Ezek az egyenletek egy-egy kört írnak le a derékszögű koordináta rendszerben. Átalakítva:

$$(1) \ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$(2) \ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Az ábrán a körök koordináta rendszerben láthatók.



Az ábráról könnyen leolvasható (számolással is könnyen megkapható), hogy az egyenletnek hat rendezett, egészekből álló számpár megoldása van ($x + y \neq 0$):

$(-1; 0)$, $(-1; -1)$, $(0; -1)$, $(0; 1)$, $(1; 1)$, $(1; 0)$.

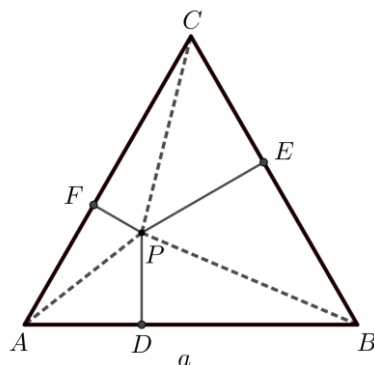
2. Az ABC szabályos háromszög belsejében vegyünk fel egy tetszőleges P pontot, majd bocsássunk P -ből merőlegest az oldalakra. Legyenek ezek talppontjai az AB oldalon D , a BC oldalon E , az AC oldalon F . Határozzuk meg a

$$\frac{PD + PE + PF}{AF + CE + BD}$$

hányados értékét.

Megoldás

Jelölje a háromszög oldalhosszát a , és legyen P tetszőleges belső pont.



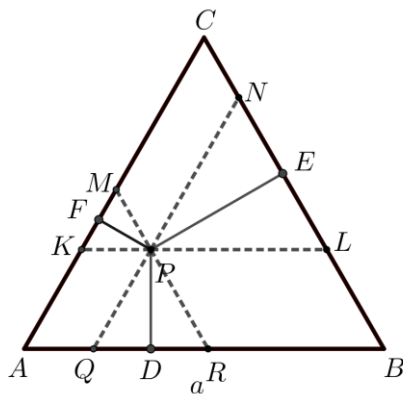
1. ábra

Előbb a meghatározandó tört számlálóját fejezzük ki a -val. Ehhez a háromszög területét írjuk fel kétféleképpen. Egyrészt $T = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$. Másrészt P -ből a csúcsokhoz húzott szakaszok három

háromszögre osztják az eredeti háromszöget, így $T = \frac{a}{2} \cdot (PD + PE + PF)$. A terület két

kifejezését egyenlővé téve kapjuk, hogy $PD + PE + PF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

A nevező a -val történő kifejezéséhez előbb húzzunk P -n keresztül párhuzamosokat a háromszög oldalaival (2- ábra).



2. ábra

Az $ABLK$, $BCMR$, $CAQN$ négyszögek tengelyesen szimmetrikus trapézok, ezért $AK = BL$, $BR = CM$, $CN = AQ$. Mivel az oldalakkal párhuzamosokat húztunk P -n keresztül, ezért a QRP , LNP , MKP háromszögek szabályosak, amiből adódóan $QD = DR$, $LE = EN$, $MF = FK$.

Ezek alapján könnyen látható, hogy $AF + CE + BD = \frac{3a}{2}$.

$$\text{Így } \frac{PD + PE + PF}{AF + CE + BD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3. Egy táblára felírtuk az $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{10}$ számokat. Egy lépésben letörlünk két számot és helyettük a különbségüket (a nagyobból vonjuk ki a kisebbet) írjuk fel a táblára. Tíz ilyen lépés után egyetlen szám marad a táblán. Mi lehet ez a szám?

Megoldás

Válasz: Bármely 2^{10} -nél kisebb páratlan szám lehet az utolsó táblán maradó szám.

A feladat általánosítását bizonyítjuk teljes indukcióval. Belátjuk, hogy ha eredetileg $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$ számok vannak a táblán, akkor n lépés után bármelyik 2^n -nél kisebb páratlan szám lehet az utolsó.

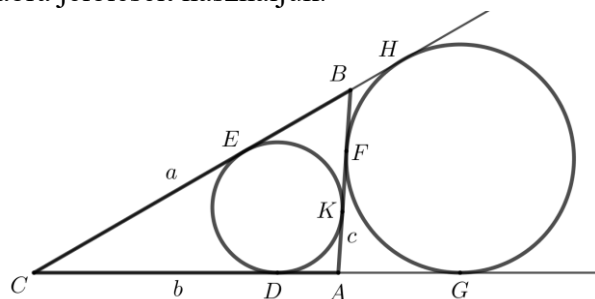
Ha $n=1$, akkor triviálisan 1 az utolsó táblán maradó szám.

Tegyük fel, hogy valamely $n \geq 1$ esetén igaz az állítás, és legyenek kiindulásként a táblán az $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, 2^{n+1}$ számok. Mivel $2^{n+1} - 2^n = 2^n$, ezért ezzel a lépéssel kezdve az indukciós hipotézis értelmében az összes 2^n -nél kisebb páratlan szám megkapható utolsóként. Legyen most 2^{n+1} az utolsó két szám egyike. Ekkor a másik szám valamely 2^n -nél kisebb páratlan szám. Könnyen látható, hogy ezek különbségeként az összes 2^n és 2^{n+1} közötti páratlan szám előállítható. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

4. Adott az ABC háromszög két oldalának hossza, $BC = a$ és $CA = b$. Mekkora az $AB = c$ oldalhossz, ha tudjuk, hogy a háromszög beírt és az AB oldalhoz hozzáírt körének az AB oldalon levő érintési pontjai harmadolják az AB oldalt?

Megoldás

Az érintési pontokra vonatkozó feltétel alapján $a \neq b$, ezért feltételezhetjük, hogy $a > b$. A továbbiakban az alábbi ábra jelöléseit használjuk.



A feltétel alapján $AK = KF = FB = \frac{c}{3}$. A körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlősége alapján a háromszög beírt körére koncentrálva

$$\frac{c}{3} = BK - AK = BE - AD = (BE + EC) - (AD + DC) = a - b,$$

azaz $c = 3(a - b)$.

Bár a válasz megadásához elegendő volt a beírt kör érintési pontjait és érintőszakaszait vizsgálni, a teljes megoldáshoz le kell ellenőrizni, hogy a hozzáírt kör megfelelő érintési pontja is teljesíti-e a feltételt.

Mivel $CG = CH = \frac{a+b+c}{2}$, ezért $BF = BH = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}$. Helyettesítsük c -t $3(a-b)$ -vel. Ezzel

$$BF = \frac{b+3(a-b)-a}{2} = \frac{2a-2b}{2} = a-b = \frac{c}{3},$$

azaz a hozzáírt kör érintési pontja is harmadolópont.

5. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget, ahol a, b, c pozitív valós számok.

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Megoldás

A bal oldal első tagját alakítsuk, és becsüljük alulról.

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} = a - \frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} = a - \frac{a+b}{\frac{a}{b}+1+\frac{b}{a}} \geq a - \frac{a+b}{3}.$$

A becslésnél felhasználtuk, hogy egy pozitív számnak és a reciprokának összege legalább 2.

A bal oldal többi tagjára hasonlóan adódik, hogy

$$\frac{b^3}{b^2+bc+c^2} \geq b - \frac{b+c}{3} \text{ és } \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq c - \frac{c+a}{3}.$$

Összegezve a kapott három egyenlőtlenség megfelelő oldalait, kis átalakítással kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. Látható az is, hogy egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b = c$.

6. Egy szabályos n -szög alapú egyenes hasáb csúcsait három színnel szeretnénk színezní úgy, hogy mindegyik csúcs esetén a belőle kifutó három él másik végpontjai páronként különböző színűek legyenek. Mutassuk meg, hogy ez akkor és csak akkor valósítható meg, ha n osztható 3-mal.

Megoldás

Legyen a három szín piros, sárga, zöld.

Ha n 3-mal osztható, akkor az alaplap csúcsait színezzük valahonnan kezdve pozitív körüljárás szerint egymás után piros-sárga-zöld színűre periodikusan. Ugyanígy színezzük ki a fedőlapot is, az oldalélel összekötött csúcsok azonos színűek legyenek. Könnyen látható, hogy ez a színezés megfelel a feltételnek.

A megfordítás bizonyítása végett tegyük fel, hogy a hasáb csúcsait sikerült a feltételnek megfelelően megszínezní. Legyen a piros csúcsok száma p . Minden piros csúcsnak van három szomszédja (három csúcs, amit az adott csúccsal él köt össze), ezért $3p$ darab csúcsnak van

piros szomszédja. Mivel minden csúcsnak pontosan egy piros szomszédja van, ezért a csúcsok száma $3p$. A csúcsok száma másrészt $2n$, így $3p = 2n$. Mivel 2 és 3 relatív prímek, és 3 osztója $2n$ -nek, ezért 3 osztója n -nek is, és ezt akartuk bizonyítani.